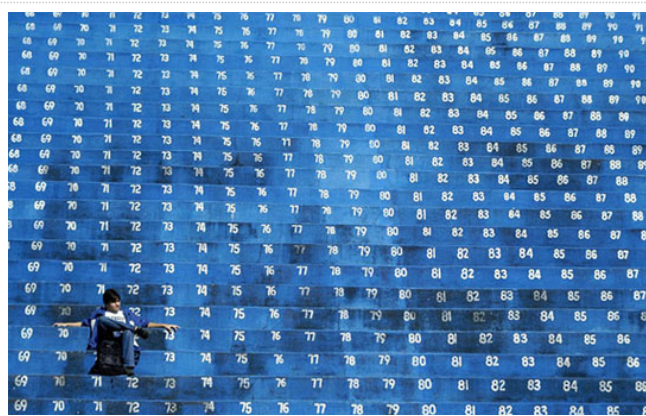


Числа не от мира сего

Если числа не были придуманы людьми, то они существовали до сотворения мира.



Слово «счет» на трибунах стадионов может значить совсем не то же самое, что на игровом поле. Но и там оно не менее важно.

Четыреста лет назад великий немецкий математик и астроном Иоганн Кеплер (Johannes Kepler, 1571–1630) писал в своей автобиографии, что числа с детства завораживали его. Ведь это единственная известная нам вещь, существовавшая до сотворения мира.

Вероятно, того же мнения придерживался и Блаженный Августин (Sanctus Aurelius Augustinus, 354–430). Он полагал:

Число шесть совершенно само по себе, а не по тому, что Господь сотворил всё сущее за шесть дней. Скорее наоборот: Бог сотворил все сущее за шесть дней, по тому что это число совершенно. И оно оставалось бы совершенным, даже если бы не было сотворения за шесть дней.

Совершенными называют числа, равные сумме своих делителей: $6 = 1 + 2 + 3$. Во времена Августина таких чисел было известно всего четыре: 6, 28, 496 и 8128. Из приведенного рассуждения следует, что до творения число шесть не только существовало, но уже тогда оно было совершенным. А значит, уже тогда существовали операции над ними. Инстинктивное чувство числа, от природы присущее не только людям, но и некоторым животным. Умение считать приобретается людьми в процессе своего развития. Очевидно, научиться считать могут не только люди, но никак нельзя сказать, что кто-то обладает этим умением от природы.

Чувство числа

Очевидно, человек, а также некоторые другие животные могут определить количество одинаковых предметов в множестве «с первого взгляда», не считая. В своей знаменитой книге «Числа: язык науки» (NUMBER: The Language of Science (A Critical Survey Written for the Cultured non Mathematician)) российско-балтийско-немецко-американский математик Тобиас Данциг (Tobias Dantzig, 1884–1956) рассказывает такую историю:

Один землепашец решил застрелить ворону, которая свила гнездо на сторожевой башне его имения. Неоднократно он пытался заставить птицу врасплох, но безуспешно: как только он приближался, ворона оставляла свое гнездо. На отдаленном дереве она настороженно выжидала, пока человек покинет башню, а потом возвращалась к гнезду. Однажды землевладелец придумал хитрость: два человека вошли в башню, один остался внутри, другой вышел из башни и ушел. Но птица не обманулась, она держалась поодаль, пока не ушел и второй человек. В последующие дни эксперимент повторяли с двумя, тремя, затем четырьмя людьми, и все безуспешно. Наконец в башню направилось пять человек. Как и прежде, все вошли, один остался в башне, тогда как четверо вышли и ушли. И тут ворона сбилась со счета. Она не

смогла отличить четыре от пяти и сразу же вернулась в свое гнездо.



Ворона на башне Эдинбургского замка. Ворона была едва ли ни первым животным, у которого отчетливо обнаруживалось чувство числа (the number sense).

Ворона не считала людей, иначе ничего не помешало бы ей установить, что каждый раз количество ушедших на единицу меньше количества пришедших. Она оценивала количество «на глазок», действуя инстинктивно. И это далеко не единственный пример инстинктивного восприятия числа животными. Менее года назад агентство новостей «Рейтер» сообщало об экспериментах австралийских биологов, в которых удалось подтвердить умение распознавать на вид количества до четырех у медоносных пчел. Лет за десять до этого российское агентство «Информнаука» сообщало о строгом экспериментальном подтверждении таких способностей у ворон, полученном на биофаке Московского университета.

Нечасто подобную способность обнаруживают у млекопитающих, хотя она совсем не редкость у насекомых или рыб. Умение животных определять количества давно интригует ученых. Отчасти потому, что люди в своих способностях довольно мало чем от них отличаются. А отчасти потому, что весь феноменальный технологический прогресс человечества строится на расширении природного чувства благодаря искусству.

Об ограниченности «чувства числа» у людей свидетельствует, например, тот факт, что в примитивных языках ряд числительных очень короток. Иногда он обрывается уже на двойке — числительных оказывается в этом случае всего два: один и много. Иногда «много» наступает вслед за двойкой — чаще всего это случается у народов, распознающих парные предметы, и тогда два дерева все равно будут обозначаться как «много», потому что они не образуют пары. Чаще всего ряд обрывается на пятерке, а современные аборигены Австралии не имеют в своих языках числительных для обозначения чисел больших трех.

Знать и уметь

Пока нет ответа на вопрос, когда именно люди поняли, что чисел не два, не четыре и даже не шестьдесят, а бесконечно много. Есть основания полагать, что если это событие произошло и до возникновения школы Пифагора, то незадолго. И толчком к нему послужило открытие счета, подразумевающее не столько зрительное распознавание разных количеств, сколько умение их упорядочивать.



Канадские индейцы у острова Ванкувер. В индейских языках встречается несколько рядов числительных, применяемых в различных ситуациях, но каждый из этих рядов очень короткий.

Тобиас Данциг в своей книге упоминает племя индейцев цимшиан в Британской Колумбии, у которых есть семь наборов числительных. Один предназначен для плоских предметов и животных, другой — для круглых предметов и времени, третий — для людей, четвертый — для длинных предметов и деревьев, пятый — исключительно для каноэ, шестой — для тех немногих единиц измерения, которыми они умеют пользоваться, и наконец седьмой — для тех предметов, которые цимшиан не сумели определить и потому не создали для них специального ряда числительных. Подобная конкретизация понятия числа, конечно, довольно редка, однако даже в весьма развитых языках сохраняются по два ряда числительных.

Например, по-русски мы говорим: один, два, три... Но: первый, второй, третий... Так же в английском: one, two, three... но: first, second, third... Первыми обозначаются числа, которые в математике называют кардиналами, второй ряд — числа, называемые ординалами. Их тождество уже настолько прочно укрепилось в голове современного человека, что ему довольно трудно понять, насколько это разные вещи. А ведь разница между стадом из ста овец и одной овцой гораздо больше разницы между первой овцой в нем и сотой.

Для счета необходимо отождествить ординалы и кардиналы. Ниоткуда не следует, что пять предшествует шести или следует за ним. Но шестой несомненно следует за пятым. Однако прибавление единицы — вполне естественная операция, связывающая предыдущее с последующим, — скорее превращает пять в шесть, чем пятый в шестой.

Преобладание зрительного восприятия чисел можно считать доказанным для древних греков — первых математиков пифагорейской школы. В частности, они опознавали треугольные и квадратные числа — то есть те, что соответствуют количествам одинаковых камней, выкладываемых в правильные треугольники, квадраты, пяти- или шестиугольники. Ряд треугольных чисел: $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 5$, $T_4 = 8$, $T_5 = 12$, ... Ряд квадратных: $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$, $S_5 = 25$, ... Нетрудно заметить, что из созерцания их трудно сделать вывод о следовании четверки за тройкой.

Но зато если исходить из инстинктивной способности человека непосредственно на вид распознавать количества до четырех, использование многоугольных чисел значительно эту способность усилит. Квадратное число со стороной в четыре камня будет равно шестнадцати, а гексагональное и того больше — двадцати шести. Сложность процедуры подсчета будет заключаться в том, чтобы сложить имеющиеся предметы в геометрическую фигуру (и тем более проделать это мысленно). Однако такой способ представления количеств в отсутствие привычной нам позиционной записи чисел при помощи цифр значительно облегчает их классификацию. Можно сказать даже — делает её возможной.



Пифагорейцы, видимо, были первыми людьми, осознавшими, насколько врожденная геометрическая интуиция усиливает чувство числа. В последние годы математики смогли реконструировать многие существенные детали их своеобразной геометрической арифметики.

Сила примера

Выйти за пределы своего «чувства числа» человеку, благодаря воспитанию, удастся довольно быстро. Уже к пяти годам родители научат своего ребенка считать если не до ста, так до десяти уж точно. Умение считать люди подозревают и нередко обнаруживают практически у всех окружающих их животных.

Один из первых опытов по освоению животным основ устного счета относится к началу XX века, и его результаты вошли потом во все учебники по этологии и психологии.

В 1900 году отставной школьный учитель Вильгельм фон Остен (Wilhelm von Osten, 1838–1909) привез из России орловского рысака и взялся применять к нему свои оказавшиеся временно невостребованными навыки. Прогресс был медленным, но впечатляющим настолько, что уже через два-три года рысак был известен во всей Германии не иначе как «Умница Ганс» (Der kluge Hans). Он не только узнавал написанные на доске мелом цифры, но и производил арифметические действия, обозначая их результат соответствующим числом ударов копыта.

Среди способностей Умницы Ганса были и совсем удивительные. Если требовалось сложить простые дроби, например $1/2$ и $1/5$, Умница Ганс смотрел некоторое время на доску, потом бил семь раз копытом, что соответствовало числителю, делал паузу и бил копытом ещё десять раз, что соответствовало знаменателю. С тем же успехом он «диктовал» ряд делителей: для числа 28 он выстукивал копытом сначала 1, потом 2, потом 7 и, наконец, 14 раз.

В сентябре 1904 года изучением феномена занялись ученые. Собралась комиссия под председательством известного психолога Карл Штумпфа (Carl Stumpf, 1848–1936), которая пришла к выводу, что никакого обмана нет, Умница Ганс — действительно умница и умеет считать. Причем не только складывать, но даже умножать и делить.

Вывод комиссии, однако, не удовлетворил одного из учеников Штумпфа, Оскара Пфунгста (Oskar Pfungst, 1847–1933). Его эксперименты и сегодня служат примером изобретательности и научной строгости в опытах с животными. Причем искренняя готовность фон Остена оказать ему всяческую помощь в этих исследованиях служит прекрасным доказательством, что сам хозяин ни на секунду не сомневался в подлинных способностях своего питомца.

Главная руководящая идея Пфунгста строилась на его абсолютной убежденности в том, что математических способностей у животного быть не может. Умницу Ганса научили начинать стучать копытом и прекращать стучать копытом по определенному знаку, даваемому либо самим фон Остеном, либо кем-то из публики. А поэтому эксперимент следовало поставить так, чтобы то, что видит Умница Ганс, отличалось от того, что видит его хозяин.

Например, фон Остен видел, как перед лошадью выкладывают шесть неких предметов и к ним подкладывают ещё два. Но на самом деле Умница Ганс видел не два, а три добавленных предмета, и тем не менее выстукивал копытом восемь, а не девять раз.



Выступления Умницы Ганса привлекали публику. Зрители вставали вокруг него полукругом. Задание чаще всего писалось мелом на доске. Результаты своих «вычислений» Умница Ганс выстукивал копытом

Во всех опытах, придуманных Пфунгстом, получаемый ответ соответствовал знанию учителя, а не знанию его ученика. Надо было только понять, как знание учителя могло управлять поведением лошади. Однако Пфунгст преуспел и в этом: он открыл, что природа поразительных способностей Умницы Ганса в его необыкновенной внимательности. Умница Ганс замечал произвольные незаметные движения головой или бровями, которые делал фон Остен, обозначая конец серии ударов копытом. Но самым удивительным для Пфунгста оказалось открытие, что даже при отсутствии фон Остена Умница Ганс вовремя прекращал стучать копытом, получая такие сигналы от кого-нибудь из присутствующих. В том числе и от самого Пфунгста. Довольно скоро он открыл, что, оставаясь с лошадью наедине, сам подсказывал ей правильный ответ.

Аналогичные опыты повторялись потом неоднократно. Ученые могли убедиться, что лошадь можно научить даже дифференцировать. Но она будет давать экспериментатору ожидаемый ответ, совершенно не задумываясь о том, что делает.

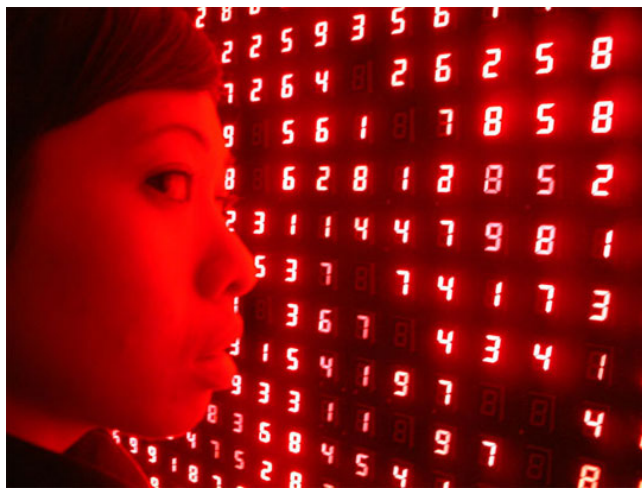
В последние годы сообщения об умеющих считать животных как в научной, так и в популярной прессе совсем не редки. Можно не сомневаться, что во многих случаях речь идет об умении, приобретаемом животным в общении с человеком — чаще всего тем самым, который и проводит эксперимент. Однако равным образом можно не сомневаться и в том, что некое природное, называемое сейчас чувством числа (The Number Sense), имеется у многих животных. Но вопрос о том, могут ли какие-нибудь животные самостоятельно, без участия человека, выучиться счету, пока остается открытым.

Числа, непригодные для счета

Об открытии бесконечности множества чисел нам известно по «Началам» Евклида (Euclid, ок. 325–270). Там доказывается, что для любого данного числа есть простое число, большее данного. Откуда, в частности, следует, что множество простых чисел бесконечно, а следовательно (тем более) бесконечно и множество чисел вообще. Мы не знаем, когда именно мысль о бесконечных рядах чисел впервые пришла в голову человека, но нет оснований думать, что между этим событием и Евклидом прошло больше полутора-двух столетий. Нет необходимости приводить тут доказательство Евклида, и так очевидно: оно невозможно без умения считать — то есть выполнять над числами элементарные арифметические действия.

Между тем новое искусство на протяжении очень долгого времени и не выходило за рамки самых примитивных операций. Старшим современникам Евклида удалось сформулировать и доказать некоторые очень важные теоремы теории чисел, в частности касающиеся совершенных чисел. Однако арифметика оставалась в зачаточном состоянии. На протяжении тысячелетия люди обходились для счета исключительно своими пальцами. Существенный прогресс в технике вычислений стал возможен только после изобретения позиционной записи чисел так называемыми арабскими цифрами и произошел лишь на рубеже XV и XVI веков.

Совершенно очевидна связь такой записи, десятичной системы счисления, а следовательно и всей арифметики Нового времени, с физиологическими особенностями человека. В частности, с наличием у него десяти длинных, тонких и хорошо сгибающихся пальцев. Будь человеческое тело устроено иначе, иная была бы у нас и арифметика. Но была бы при этом иной и вся математика?



«Все, что познается, имеет число, ибо невозможно ни понять ничего, ни познать без него» (Филолай, V век до н. э.)

«Если где-то во Вселенной ещё есть разум, то математика, которой там пользуются, должна быть примерно такой же, как у нас», — утверждает один из самых крупных математиков современности Максим Львович Концевич. Точка зрения, выраженная Кеплером и Блаженным Августином, более радикальна. Числа вообще не зависят от существования и структуры Вселенной. Они принадлежат миру идей, интеллигибельному космосу, над которым не властно время. Авторство этой теории принадлежит Платону. Следуя его логике, мы должны были бы говорить, что, рассматривая два яблока, мы распознаем в них идею двойственности.

Но есть и прямо противоположная точка зрения, также ведущая свою историю от Античности. «Вопрос ставится так: либо мы распознаем идею числа в окружающих нас предметах, либо эта идея рождается в нашем собственном разуме, и мы навязываем её окружающей нас природе», — считает французский философ Пьер Кей (Pierre Caye). Такая позиция в Европе Нового времени всегда связывались с именем Аристотеля. Если математик исследует нечто, объективно существующее в природе, то математика должна считаться естественной наукой — это точка зрения современных платоников. Аристотелик же будет считать, что математик не обнаруживает сущности, а придумывает их. И хотя эти сущности не присущи природе как таковой, они позволяют человеку формулировать до некоторой степени правильные высказывания о ней. То есть математика, с этой точки зрения, — это удобный язык, благодаря которому у человека есть возможность использовать природу для своих нужд.

Споры между сторонниками этих двух точек зрения сейчас вновь переживают острую фазу. Примерно такую же, как сто лет назад. Но сейчас в этом споре появились новые аргументы, в том числе и касающиеся восприятия числа животными. Тут пока много трудностей, но если будет все-таки доказано, что числа для них — хотя бы только несколько первых натуральных — то же самое, что и для нас, позиции платоников окажутся значительно более сильными.

Автор: Дмитрий Баяк © Вокруг Света ОБЩЕСТВО, МИР 5064 24.09.2009, 16:14

URL: <https://babr24.com/?ADE=81070> Bytes: 17447 / 16407 [Версия для печати](#) [Скачать PDF](#)

Поделиться в соцсетях:

Также читайте эксклюзивную информацию в соцсетях:

- [Телеграм](#)

- [ВКонтакте](#)

Связаться с редакцией Бабра:

newsbabr@gmail.com

Автор текста: **Дмитрий Баяк.**

НАПИСАТЬ ГЛАВРЕДУ:

Телеграм: [@babr24_link_bot](#)

Эл.почта: newsbabr@gmail.com

ЗАКАЗАТЬ РАССЛЕДОВАНИЕ:

эл.почта: bratska.net.net@gmail.com

КОНТАКТЫ

Бурятия и Монголия: Станислав Цырь

Телеграм: @bur24_link_bot

эл.почта: bur.babr@gmail.com

Иркутск: Анастасия Суворова

Телеграм: @irk24_link_bot

эл.почта: irkbabr24@gmail.com

Красноярск: Ирина Манская

Телеграм: @kras24_link_bot

эл.почта: krasyar.babr@gmail.com

Новосибирск: Алина Обская

Телеграм: @nsk24_link_bot

эл.почта: nsk.babr@gmail.com

Томск: Николай Ушайкин

Телеграм: @tomsk24_link_bot

эл.почта: tomsk.babr@gmail.com

[Прислать свою новость](#)

ЗАКАЗАТЬ РАЗМЕЩЕНИЕ:

Рекламная группа "Экватор"

Телеграм: @babrobot_bot

эл.почта: equatoria@gmail.com

СТРАТЕГИЧЕСКОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО:

эл.почта: babrmarket@gmail.com

[Подробнее о размещении](#)

[Отказ от ответственности](#)

[Правила перепечаток](#)

[Соглашение о франчайзинге](#)

[Что такое Бабр24](#)

[Вакансии](#)

[Статистика сайта](#)

[Архив](#)

[Календарь](#)

[Зеркала сайта](#)